

IZ NASTAVNE PRAKSE

Doprinos matematike razvoju osobe

ŠEFKET ARSLANAGIĆ¹

Matematika danas prožima cjelokupno društvo, a njezina uloga stalno raste jer se njena pomoć traži u situacijama i problemima koji se javljaju i izvan same matematike. Matematičke metode nisu više privilegij samo znanstvenika, inženjera i tehnologa; one se sve više koriste za analizu individualnih ponašanja i izučavanja stavova i trendova u društvu kao cjelini. Ovaj razvoj svakako povećava zahtjev za matematičkom sposobnošću – sposobnošću u matematičkom modeliranju, u algoritamskim tehnikama. Zato je matematika integralni dio ljudske kulture, socijalne, ekonomske i tehničke okoline, i to ne samo u sadašnjem obliku, nego i u svim oblicima koji će se sigurno razviti kao posljedica sve šire sposobnosti brzog računanja.

Ovdje se postavlja jedno iznimno važno pitanje: koliko matematika i dobra nastava matematike pridonose razvoju mlade osobe. Moguće je predavati matematiku na razne načine koji pridonose individualnom razvoju sklonosti, sposobnosti i mogućnosti shvaćanja.

Posebne individualne sklonosti koje se mogu probuditi su:

- samopoštovanje;
- samopouzdanje; uključujući volju za preuzimanjem odgovornosti;
- samodisciplina;
- sposobnost sa surađivanjem s drugima;
- strpljivost, posebno u procesu rješavanja problema.

Posebne vještine koje treba usađivati su:

- promatranje;
- interpretacija (tumačenje);
- priopćavanje.

Mogućnosti shvaćanja koje se mogu njegovati su:

- shvaćanje ljepote i elegancije matematičkih dokaza;
- shvaćanje odnosa matematike i života.

¹Šefket Arslanagić, Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, B i H

Sada ćemo kroz više riješenih zadataka pokazati kako se gore navedene osobine mogu uspješno razvijati kod učenika i studenata. Dat ćemo razne vrste zadataka.

Zadatak 1. Dešifrirajte množenje $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$, gdje je \overline{abcd} četveroznamenasti broj čije su znamenke a, b, c i d .

Rješenje: Ogromna je većina mojih studenata, na jednom od sati predmeta *Metodika nastave matematike*, koji sam im predavao na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, krenula rješavati ovaj zadatak na sljedeći način:

Četveroznamenasti broj \overline{abcd} može se zapisati kao:

$$\overline{abcd} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d, \quad (1)$$

gdje $b, c, d \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Sada na osnovi (1) imamo:

$$\begin{aligned} \overline{abcd} \cdot 4 &= \overline{dcba} \\ \Leftrightarrow (a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d) \cdot 4 &= d \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a \\ \Leftrightarrow 4000a + 400b + 40c + 4d - 1000d - 100c - 10b - a &= 0 \\ \Leftrightarrow 1333a + 130b - 20c - 332d &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Očito (2) je **linearna Diofantska² jednačica** s četiri nepoznanice a, b, c i $d \in \mathbb{N}_0$. Naći rješenje ove jednačice nije nimalo lagan posao; zahtijeva prilično vremena i strpljenja.

Srećom, našlo se tu nekoliko studenata koji su ovaj zadatak riješili efektno i brzo, koristeći pravila o djeljivosti brojevima 2, 3, 4, 5, 6, 8 i 9. Evo tog rješenja.

Budući da je umnožak četveroznamenastog broja \overline{abcd} brojem 4 ponovo četveroznamenasti broj \overline{dcba} , to a mora biti paran broj. Kako su jedine dvije znamenke koje bi mogao uzeti za znamenku a jednake 1 ili 2, zaključujemo da je $a = 2$. Sada imamo:

$$\overline{2bcd} \cdot 4 = \overline{dcb2}.$$

Oдавде zaključujemo da mora biti $d = 3$ ili $d = 8$ jer je $4 \cdot 3 = 12$, te $4 \cdot 8 = 32$ i $4 \cdot 2 = 8$, pa zaključujemo da je $d = 8$. Dakle, sada imamo:

$$\overline{2bc8} \cdot 4 = \overline{8cb2}.$$

Sada zaključujemo da mora biti $b \in \{0, 1, 2\}$. Kako broj $\overline{8cb2}$ mora biti djeljiv brojem 4, očito je $b = 1$, tj. dobivamo da je:

$$\overline{21c8} \cdot 4 = \overline{8c12}.$$

² Diofant, starogrčki matematičar koji je živio u Aleksandriji u 3. stoljeću.

Budući da je $4 \cdot 7 + 3 = 28 + 3 = 31$, slijedi da mora biti $c = 7$. Konačno dobivamo:

$$\overline{abcd} = 2178, \text{ tj. } 2\,178 \cdot 4 = 8\,712.$$

Zadatak 2. Ako je $x = 2011(a - b)$, $y = 2011(b - c)$, $z = 2011(c - a)$, izračunajte vrijednost brojevnog izraza:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}; \quad (xy + yz + zx \neq 0),$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Opet se većina učenika (ili pak studenata) odlučuje na uvrštavanje danih brojeva x, y, z u dani količnik, s namjerom da nakon nešto duljeg računanja dođe do rezultata koji iznosi -2 . Srećom, uvijek se tu nađe onih koji ovaj zadatak rješavaju mnogo jednostavnije i kraće, na sljedeći način:

Imamo

$$x + y + z = 2011(a - b + b - c + c - a) = 2011 \cdot 0 = 0,$$

$$\Rightarrow x + y + z = 0^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx),$$

a odavde, nakon dijeljenja ove jednakosti s $xy + yz + zx \neq 0$, dobivamo:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} = -2.$$

Čitatelji će se sigurno složiti da je ovo rješenje kudikamo elegantnije i ljepše od onog prvog. Ovo rješenje u potpunosti opravdava i afirmira sve ono rečeno u prvom dijelu ovog članka, a odnosi se na posebne, individualne sklonosti koje se javljaju kod budućih matematičara, sada učenika ili studenata.

Zadatak 3. Dokažite da su svi brojevi oblika $n^4 + 4$; ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) složeni brojevi.

Rješenje: Svi znamo da su prosti brojevi oni prirodni brojevi različiti od 1 koji su djeljivi samo sami sobom i jedinicom. Znači, složeni brojevi imaju bar još jedan djelitelj koji nije 1 ili sam taj broj.

Moji učenici (pa čak i studenti) uglavnom priđu rješavanju ovog zadatka na jedan uobičajen i prirodan način. Naime, prvo uzmu da je n paran broj, pa je i broj $n^4 + 4$ također paran broj, a samim time je i složen. Ako je pak n neparan broj, tada je broj $n^4 + 4$ neparan, ali nije lako dokazati da je i složen. Ako je $n = 2k + 1$; ($k \in \mathbb{N}$ zbog $n > 1$), tada dobivamo:

$$n^4 + 4 = (2k + 1)^4 + 4 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 5,$$

a sada je teško utvrditi je li dobiveni neparan broj prost ili složen. Što raditi sada?

Postoji jedan identitet u matematici koji glasi:

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab); \quad (a, b \in \mathbb{R}), \quad (3)$$

a naziva se **Identitet Sophie Germain**³. Očito vrijedi:

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab), \end{aligned}$$

što je trebalo dokazati.

Sada na osnovi (3) imamo za $a = n$ i $b = 1$:

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2),$$

a ovaj broj je svakako složen jer je $n^2 - 2n + 2 > 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Lijepo rješenje, nema što!

Zadatak 4. Treba dokazati da su svi cijeli brojevi oblika $n^3 + 5n$; ($n \in \mathbb{Z}$) djeljivi brojem 6, tj.

$$6 \mid A(n) = n^3 + 5n; \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Rješenje: Bio sam svjedok ovakvog rješenja ovog zadatka: Za $n = 0$ dobivamo $A(0) = 0$, a ovaj broj je djeljiv brojem 6, tj. $0 : 6 = 0$. Zaljubljenici u princip matematičke indukcije sada dokazuju da vrijedi $6 \mid A(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Naime, za $n = 1$ slijedi $A(1) = 6$, a ovaj broj je djeljiv brojem 6.

Neka vrijedi $6 \mid A(n) = n^3 + 5n$ za sve $n \geq 1$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} A(n+1) &= (n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = n^3 + 5n + (3n^2 + 3n + 6) = \\ &= A(n) + 3(n^2 + n + 2) \end{aligned}$$

tj.
$$A(n+1) = A(n) + 3[(n+1)(n+2) - 2n],$$

a ovaj broj je djeljiv brojem 6 jer je prema pretpostavci $6 \mid A(n)$, a broj $(n+1)(n+2)$ je umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva od kojih je jedan paran, pa je broj $(n+1)(n+2) - 2n$ djeljiv brojem 6. Ima ovdje dosta posla!

Kako dalje? Što učiniti ako je $n < 0$; $n \in \mathbb{Z}$? Stavimo da je $n = -m < 0$; ($m \in \mathbb{N}$). Sada imamo

$$A(n) = A(-m) = (-m)^3 + 5 \cdot (-m) = -(m^3 + 5m),$$

a ovaj broj je djeljiv brojem 6 jer smo dokazali da je broj $m^3 + 5m$; ($m \in \mathbb{N}$) djeljiv brojem 6, pa je i broj $-(m^3 + 5m)$ djeljiv brojem 6.

³ Sophie Germain, 1776.-1831., francuska matematičarka koja je imala uspjeha u rješavanju Fermatovog velikog teorema. Dopisivala se s Gaussom, D'Alembertom, Legendrom, itd.

Komplicirano, nema što! No, jedno kratko elegantno rješenje zadatka za koji je potrebna jedna sjajna ideja oblika $5n = 6n - n$ donekle nas ostavlja bez daha. Naime, imamo:

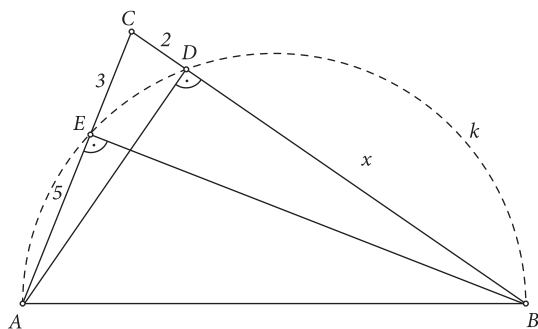
$$A(n) = n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n-1)n(n+1) + 6n,$$

a ovaj broj je očito djeljiv brojem 6 jer je $(n-1)n(n+1)$ umnožak triju uzastopnih cijelih brojeva za sve $n \in \mathbb{Z}$ (doduše, za $n \in \{-1, 0, 1\}$ dobivamo da je taj broj 0 koji je djeljiv brojem 6) od kojih je bar jedan paran, a jedan djeljiv brojem 3, pa je taj broj djeljiv brojem $3 \cdot 2 = 6$.

Napomena: Gornju smo činjenicu mogli dokazati uz uvjet da je $n = 3k$ ili $n = 3 \pm 1$; ($k \in \mathbb{Z}$).

Zadatak 5. Dužine \overline{AD} i \overline{BE} su visine trokuta $\triangle ABC$; ($D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{AC}$). Ako je $|AE| = 5$, $|CE| = 3$ i $|CD| = 2$, koliko iznosi $x = |BD|$?

Rješenje: Učenici (pa i studenti) uglavnom su zaljubljeni u Pitagorin⁴ poučak, pa nije čudo da, nakon što nacrtaju sliku i uoče dva pravokutna trokuta $\triangle ACD$ i $\triangle BCE$, polete ovaj zadatak riješiti pomoću tog poučka.



Slika 1.

Sada na temelju Pitagorinog poučka za trokut ACD vrijedi (Slika 1.):

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= |AC|^2 - |CD|^2 \\ \Rightarrow |AD|^2 &= 8^2 - 2^2 = 60 \\ \Rightarrow |AD| &= \sqrt{60} = 2\sqrt{15}. \end{aligned}$$

Nadalje, za trokut ABD vrijedi (sl. 1.):

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AD|^2 + |BD|^2 \\ \Rightarrow |AB|^2 &= 60 + x^2 \\ \Rightarrow |AB| &= \sqrt{60 + x^2}, \end{aligned}$$

⁴ Pitagora, starogrčki matematičar iz 6. stoljeća prije n. e.

za trokut ABE vrijedi (sl. 1.):

$$\begin{aligned} |BE|^2 &= |AB|^2 - |AE|^2 \\ \Rightarrow |BE|^2 &= 60 + x^2 - 25 \\ \Rightarrow |BE| &= \sqrt{35 + x^2}, \end{aligned}$$

a za trokut BCE vrijedi (sl. 1.):

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |CE|^2 + |BE|^2 \\ \Rightarrow (x+2)^2 &= 9 + 35 + x^2 \\ \Rightarrow x^2 + 4x + 4 &= 44 + x^2 \\ \Rightarrow x &= 10. \end{aligned}$$

Točno, pretjerali smo s Pitagorom. Teška srca prihvaćam i one koji su na ovaj način došli do rješenja i dajem im lijepu ocjenu.

Opet, srećom, oni lucidni pojedinci vrate mi raspoloženje i osmijeh na lice kada riješe ovaj zadatak u tri reda, koristeći činjenicu da su pravokutni trokuti $\triangle ACD$ i $\triangle BCE$ slični (Zašto?). Iz te sličnosti trokuta slijedi razmjernost:

$$\begin{aligned} |CD| : |CE| &= |AC| : |BC|, \text{ tj.} \\ 2 : 3 &= (5 + 3) : (x + 2), \\ 2(x + 2) &= 3 \cdot 8, \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Još me više obraduju oni koji uoče da zbog $|\angle AEB| = |\angle ADB| = 90^\circ$ točke D i E pripadaju kružnici k čiji je promjer dužina \overline{AB} . Sada iskoriste teorem o potenciji točke C u odnosu na kružnicu k , te dobivaju:

$$\begin{aligned} |CE| \cdot |CA| &= |CD| \cdot |CB|, \text{ tj.} \\ 3 \cdot 8 &= 2(2 + x) \\ 24 &= 4 + 2x \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Neki kažu na kraju da smo zadatak mogli riješiti koristeći izračunavanje površine trokuta ABC , tj. $p_{\triangle ABC} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BE|}{2}$, ili trigonometriju, ili pak analitičku geometriju, što je točno. Ali - zašto komplicirati kada sve može biti jednostavno?

Zadatak 6. Treba izračunati maksimalnu vrijednost izraza $\log x + \log y + \log z$ ako su $x, y, z > 0$, a da pri tome vrijedi jednakost $x + 4y + 16z = 120$.

Rješenje: Uh, zadatak u vezi nalaženja ekstrema, i to uvjetnog, funkcije od tri varijable, uz korištenje Lagrangeovog multiplikatora λ ! Pa to je matematička analiza! U pitanju je funkcija:

$$F(x, y, z, \lambda) = \log x + \log y + \log z + \lambda(x + 4y + 16z - 120).$$

Parcijalne derivacije, prvi diferencijal funkcije i još koješta?! Uistinu teško!?

Ali - nije tako! Tu je sjajna ideja koristiti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine tri pozitivna broja, kao i pravilo za logaritam produkta. Sitnica! Imamo:

$$\frac{x + 4y + 16z}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 16z}; \quad (x, y, z > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{120}{3} \geq \sqrt[3]{64xyz}$$

$$\Leftrightarrow 40 \geq 4 \cdot \sqrt[3]{xyz}$$

$$\Leftrightarrow xyz \leq 1000$$

$$\Leftrightarrow \log x + \log y + \log z \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \text{Max}(\log x + \log y + \log z) = 3,$$

ako je $x = 4y = 16z$, tj. $\frac{x}{16} = \frac{y}{4} = z$.

Izvršno rješenje!

Zadatak 7. Ako je $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$, treba izračunati

$$\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{S_{2011}}}.$$

Rješenje: Znamo mi da vrijedi pravilo:

$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

dokazali smo ga pomoću principa matematičke indukcije.

Imamo sada:

$$\frac{1}{\sqrt{S_n}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Ovo se svodi na poznate postupke. Sjajno!

Slijedi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{S_n}} = \\ & 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2010 \cdot 2011} \right) = \\ & = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} \right) = \\ & = 2 \left(1 - \frac{1}{2012} \right) = \frac{2011}{1006}. \end{aligned}$$

Mišljenja smo da će se ovih sedam zadataka i njihovih raznih rješenja svidjeti čitateljima ovoga članka. Sigurno će im dati put i neke ideje za bavljenje matematikom u budućnosti. Tu pretežno mislim na mlade matematičare i nastavnike koji rade s učenicima koji pokazuju veći interes za matematiku.

LITERATURA

- [1] Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
- [2] Arslanagić, Š.: *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.
- [3] Dakić, B.: *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [4] Polya, G.: *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb, 2003.